

Bài 1. Luyện tập

Trong một buổi luyện tập chuẩn bị cho kì thi học sinh giỏi, thầy giáo giao cho An T truy vấn. Truy vấn thứ i gồm hai số nguyên dương l_i và r_i .

Gọi tập các số nguyên tố nằm trong đoạn từ l_i đến r_i , được sắp xếp theo thứ tự tăng dần, là $S = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Với mỗi truy vấn, An cần tính giá trị $f_i = \sum_{j=1}^k j \times p_j$.

Vì kết quả có thể rất lớn, hãy in ra phần dư của f_i khi chia cho $10^9 + 7$ đối với mỗi truy vấn.

Dữ liệu vào. Nhập vào từ luồng dữ liệu chuẩn gồm:

- Dòng đầu tiên chứa một số nguyên dương T là số lượng bài toán.
- T dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa một số nguyên l_i, r_i ($1 \leq l \leq r \leq 10^6$).

Dữ liệu ra. Ghi ra luồng dữ liệu chuẩn gồm T dòng, mỗi dòng chứa đáp án cho bài toán tương ứng.

Ví dụ

standard input	standard output
2	23
1 5	34
3 7	

Bài 2. Số phong phú

Số phong phú là số có tổng các ước số không kể chính nó lớn hơn nó, chẳng hạn 20 là số phong phú vì $1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22 > 20$.

Yêu cầu. Hãy đếm số lượng số phong phú có giá trị nằm trong đoạn $[l, r]$.

Dữ liệu vào. Nhập vào từ luồng dữ liệu chuẩn gồm:

- Dòng đầu tiên chứa một số nguyên dương T là số trường hợp test ($T \leq 10^5$).
- T dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa một số nguyên l, r mô tả một trường hợp test ($1 \leq l \leq r \leq 10^6$).

Dữ liệu ra. Ghi ra luồng dữ liệu chuẩn gồm T dòng, mỗi dòng chứa đáp án cho trường hợp test tương ứng.

Ví dụ

standard input	standard output
1	3
1 20	

Subtasks

- Subtask 1 (25% số điểm): $T \leq 10$.
- Subtask 2 (75% số điểm): Không có ràng buộc gì thêm.

Bài 3. Câu đố của thầy Thái

Trong buổi học về số học tại **Trại hè Sáng tạo Khoa học**, thầy Thái nhận thấy các bạn học sinh rất thích khám phá những tính chất đặc biệt của các số nguyên. Vì vậy, thầy đưa ra một câu đố như sau:

Cho hai số nguyên dương a, b . Hãy đếm số lượng các số trong đoạn $[a, b]$ sao cho số ước của chúng là một số nguyên tố, ngoài ra có thể có một số *ràng buộc bổ sung*.

Không chỉ dừng lại ở đó, thầy Thái còn muốn thử thách các bạn bằng cách không cho chỉ một bộ số a, b , mà đưa ra T bộ số. Các học sinh của Trại hè Sáng tạo Khoa học cần viết chương trình để trả lời nhanh tất cả các câu hỏi của thầy.

Chú ý. Trong bài toán này, *ràng buộc bổ sung* ở điều kiện phụ thuộc vào các subtask. Chi tiết hơn, thí sinh xem mục **Subtask**.

Yêu cầu. Hãy giúp các bạn học sinh trả lời các câu hỏi của thầy Thái.

Dữ liệu vào. Nhập vào từ luồng dữ liệu chuẩn gồm:

- Dòng đầu tiên chứa một số nguyên dương T là số câu hỏi của thầy Thái ($T \leq 10^5$).
- T dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa hai số nguyên dương a, b mô tả một câu hỏi của thầy Thái ($1 \leq a \leq b \leq 10^{12}$).

Dữ liệu ra. Ghi ra luồng dữ liệu chuẩn gồm T dòng, mỗi dòng chứa đáp án cho câu hỏi tương ứng.

Ví dụ

standard input	standard output
5	82
12 400	93
412 1000	17
32 100	141
1910 3000	32
1 100	

Subtasks. Nếu không đề cập gì thêm, quy ước rằng tại subtask đó *ràng buộc bổ sung* ở điều kiện không tồn tại

- Subtask 1 (20% số điểm): $1 \leq a \leq b \leq 200$ và $T \leq 100$.
- Subtask 2 (20% số điểm): $1 \leq a, b \leq 2000$ và $T \leq 1000$.
- Subtask 3 (20% số điểm): $1 \leq a, b \leq 10^6$ và $T \leq 1000$.
- Subtask 4 (20% số điểm): $1 \leq a, b \leq 10^6$ và $T \leq 10^5$.
- Subtask 5 (20% số điểm): $10^6 < a, b \leq 10^{12}$ và $T \leq 10^5$. *Ràng buộc bổ sung* là số lượng ước của số phải là số nguyên tố lớn hơn 2.

Bài 4. Giả thuyết Goldbach

Giả thuyết Goldbach cho rằng tất cả các số tự nhiên chẵn lớn hơn 2 đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của 2 số nguyên tố. Gọi $G(n)$ là số cách khác nhau biểu diễn số $2 \times n$ dưới dạng tổng 2 số nguyên tố.

Yêu cầu. Cho một số nguyên dương n , tính $F(n) = G(2) + G(3) + \dots + G(n)$

Dữ liệu vào. Nhập vào từ luồng dữ liệu chuẩn gồm:

- Dòng đầu tiên gồm một số nguyên dương T là số trường hợp test ($T \leq 30$).
- T dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa một số nguyên dương n mô tả một trường hợp test ($3 \leq n \leq 5 \times 10^5$)

Dữ liệu ra. Ghi ra luồng dữ liệu chuẩn gồm T dòng, mỗi dòng chứa đáp án cho trường hợp test tương ứng.

Ví dụ

standard input	standard output
3	8
7	3
4	12
9	

Bài 5. Hệ thống mã hóa

Một hệ thống mã hóa lưu trữ một dãy khóa bí mật gồm N số nguyên dương $A_1, A_2, \dots, A_N$. Để kiểm tra độ ổn định của hệ thống, người ta thực hiện M lần mã hóa thử. Ở lần mã hóa thử thứ i ($1 \leq i \leq M$), hệ thống thực hiện các bước sau:

- Chọn số nguyên dương B_i , sau đó tạo dãy $C_{i,1}, C_{i,2}, \dots, C_{i,N}$, được xác định như sau:

$$C_{i,j} = A_j + B_i \quad (1 \leq j \leq N)$$

- Ghi lại mã kiểm tra của lần thử này, biết rằng mã kiểm tra được định nghĩa là ước chung lớn nhất của các số $C_{i,1}, C_{i,2}, \dots, C_{i,N}$, tức là $\gcd(C_{i,1}, C_{i,2}, \dots, C_{i,N})$.

Yêu cầu. Hãy tính và in ra mã kiểm tra của mọi lần mã hóa thử.

Dữ liệu vào. Nhập vào từ luồng dữ liệu chuẩn gồm:

- Dòng đầu tiên chứa hai số nguyên dương N, M lần lượt là số lượng phần tử của dãy khóa bí mật và số lần mã hóa thử ($1 \leq N, M \leq 10^5$).
- Dòng thứ hai chứa N số nguyên dương $A_1, A_2, \dots, A_N$ là các phần tử của dãy khóa ($1 \leq A_i \leq 10^{18}$).
- Dòng thứ ba chứa M số nguyên dương $B_1, B_2, \dots, B_M$ là các số được chọn trong các lần mã hóa thử ($1 \leq B_i \leq 10^{18}$).

Dữ liệu ra. Ghi ra luồng dữ liệu chuẩn gồm M số nguyên, số thứ i ($1 \leq i \leq M$) là mã kiểm tra của lần mã hóa thử thứ i .

Ví dụ

standard input	standard output
4 3	4 2 2
6 10 14 22	
2 4 8	

Subtasks

- Subtask 1 (30% số điểm): $N, M \leq 1000$.
- Subtask 2 (70% số điểm): Không có ràng buộc gì thêm.

Bài 6. Đội hình hài hòa

Trong ngày hội của trường, có N học sinh tham gia một tiết mục biểu diễn. Học sinh thứ i ($1 \leq i \leq N$) được giao một tấm thẻ có ghi số nguyên dương A_i .

Trước khi biểu diễn, mỗi học sinh phải chọn một số P_i làm *nhịp biểu diễn* của mình. Để nhịp này phù hợp với tấm thẻ được giao, số P_i phải là một ước của A_i .

Sau khi tất cả học sinh đã chọn xong, ta thu được dãy nhịp biểu diễn $P_1, P_2, \dots, P_N$. Dãy nhịp này được gọi là *hài hòa* nếu bội chung nhỏ nhất của tất cả các nhịp bằng đúng tích của chúng, tức là

$$\text{lcm}(P_1, P_2, \dots, P_N) = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_N$$

Yêu cầu. Hãy đếm số cách chọn dãy nhịp biểu diễn hài hòa. Hai cách chọn được xem là khác nhau nếu tồn tại ít nhất một học sinh i chọn hai giá trị P_i khác nhau.

Dữ liệu vào. Nhập vào từ luồng dữ liệu chuẩn gồm:

- Dòng đầu tiên chứa một số nguyên dương T là số trường hợp test ($1 \leq T \leq 10^4$).
- Với trường hợp test, dữ liệu gồm 2 dòng theo định dạng sau:
 - Dòng đầu tiên chứa một số nguyên dương N là số học sinh tham gia biểu diễn ($1 \leq N \leq 10^5$).
 - Dòng thứ hai chứa N số nguyên dương $A_1, A_2, \dots, A_N$ là các số được ghi trên các tấm thẻ ($1 \leq A_i \leq 5 \times 10^5$).

Dữ liệu đảm bảo tổng các số N trên mọi trường hợp test không vượt quá 10^5 .

Dữ liệu ra. Ghi ra luồng dữ liệu chuẩn gồm T dòng, mỗi dòng chứa đáp án cho trường hợp test tương ứng. Vì kết quả có thể rất lớn nên hãy in ra số dư của kết quả khi chia cho $10^9 + 7$.

Ví dụ

standard input	standard output
4	8
4 1	4
2 3 1 4	40
2 1	64
2 4	
6 1	
3 9 1 6 4 5	
7 1	
1 2 3 67 13 8 8	

Bài 7. Thẻ điểm thưởng

Trong ngày hội câu lạc bộ, Nam chuẩn bị N thẻ thử thách, trên thẻ thứ i ghi một số nguyên không âm x_i . Mỗi lượt chơi, Nam chọn đúng K thẻ khác nhau; điểm của lượt chơi đó bằng số lớn nhất được ghi trên các thẻ đã chọn. Nam muốn thử tất cả các cách chọn K thẻ từ N thẻ và cần biết tổng số điểm nhận được.

Yêu cầu. Gọi S là tổng điểm của tất cả các lượt chơi có thể. Hãy tính phần dư của S khi chia cho $10^9 + 7$.

Dữ liệu vào. Nhập vào từ luồng dữ liệu chuẩn gồm:

- Dòng đầu tiên chứa một số nguyên dương N là số thẻ ($N \leq 10^5$).
- Dòng thứ hai chứa N số nguyên $x_1, x_2, \dots, x_N$ ($0 \leq x_i \leq 10^6$)

Dữ liệu ra. Ghi ra luồng dữ liệu chuẩn một số nguyên duy nhất là kết quả của bài toán.

Ví dụ

standard input	standard output
4 2 6 7 6 5	39

Bài 8. Dấu vết kho báu

Một đoàn thám hiểm đang khảo sát một mê cung cổ được mô phỏng bằng không gian ba chiều. Ban đầu, đoàn đứng tại vị trí $(0, 0, 0)$ và cần đi đến cánh cổng cuối cùng tại vị trí (X, Y, Z) . Mỗi lần di chuyển, đoàn chỉ được tăng đúng một trong ba tọa độ lên 1, tức là từ (x, y, z) có thể đi đến một trong ba vị trí $(x + 1, y, z)$, $(x, y + 1, z)$ hoặc $(x, y, z + 1)$.

Trên đường đi có một số kho báu được đặt tại các vị trí đặc biệt. Cụ thể, với mỗi số nguyên i sao cho $1 \leq i < K$ (K là một số nguyên dương cho trước), có một kho báu ở vị trí

$$\left(i \times \left\lfloor \frac{X}{K} \right\rfloor, i \times \left\lfloor \frac{Y}{K} \right\rfloor, i \times \left\lfloor \frac{Z}{K} \right\rfloor \right)$$

Biết rằng $X, Y, Z \geq K$ nên các kho báu này nằm ở những vị trí phân biệt.

Nhắc lại: Với một số thực x , $\lfloor x \rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

Yêu cầu. Hãy đếm số đường đi từ $(0, 0, 0)$ đến (X, Y, Z) đi qua ít nhất một kho báu. Hai đường đi được xem là khác nhau nếu tồn tại ít nhất một thời điểm mà hai đường đi thực hiện thao tác khác nhau.

Dữ liệu vào. Nhập vào từ luồng dữ liệu chuẩn gồm một dòng duy nhất chứa bốn số nguyên dương X, Y, Z, K ($2 \leq K \leq 20$; $K \leq X, Y, Z \leq 10^7$).

Dữ liệu đảm bảo các số được viết trên lưới không vượt quá 10^9 .

Dữ liệu ra. Ghi ra luồng dữ liệu chuẩn gồm:

- Một số nguyên duy nhất là số đường đi hợp lệ. Vì kết quả có thể rất lớn nên thí sinh chỉ cần in ra số dư của kết quả khi chia cho 998 244 353

Ví dụ

standard input	standard output
3 3 3 3	864

Subtasks

- Subtask 1 (10% số điểm): $K \leq 3$ và $X, Y, Z \leq 4$.
- Subtask 2 (18% số điểm): $K = 2$ và $X, Y, Z \leq 1000$.
- Subtask 3 (22% số điểm): $K = 3$ và $X, Y, Z \leq 1000$.
- Subtask 4 (22% số điểm): $K = 3$.
- Subtask 5 (28% số điểm): Không có ràng buộc gì thêm.

Bài 9. Phương trình nghiệm nguyên

Trong một tiết học toán, cô Trang yêu cầu các bạn học sinh trả lời T câu hỏi có dạng như sau:

Cho số nguyên X , tìm tất cả số N sao cho $\sqrt[4]{9N^2 + 18N + X}$ là số nguyên.

Đứng trước bài toán khó này, các bạn học sinh gặp rất nhiều khó khăn để giải. Hãy giúp các bạn học sinh trả lời các câu hỏi của cô Trang.

Nhắc lại: Biểu thức $\sqrt[4]{x}$ có giá trị là số k không âm sao cho $k^4 = x$ trong trường hợp $x \geq 0$; ngược lại, nếu $x < 0$ thì biểu thức **không được xác định**. Ví dụ, $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[4]{67} \approx 2.861006$.

Yêu cầu. Với mỗi câu hỏi của cô Trang, tìm tất cả N thỏa mãn. Chú ý rằng, một câu hỏi có thể có vô số nghiệm.

Dữ liệu vào. Nhập vào từ luồng dữ liệu chuẩn gồm:

- Dòng đầu tiên chứa một số nguyên dương T là số câu hỏi của cô Trang ($T \leq 10$).
- T dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa một số nguyên X mô tả một câu hỏi của cô Trang ($|X| \leq 10^{12}$).

Dữ liệu ra. Ghi ra luồng dữ liệu chuẩn gồm:

- Với mỗi câu hỏi, nếu có ít nhất một giá trị N thỏa mãn: in ra một dòng là số lượng giá trị N thỏa mãn; dòng tiếp theo là danh sách các giá trị thỏa mãn theo thứ tự tăng dần, ngăn cách nhau bởi dấu cách.
- Nếu không có giá trị N thỏa mãn, in ra một dòng chứa số 0. Nếu có vô số giá trị N thỏa mãn, in ra một dòng chứa số -1.

Ví dụ

standard input	standard output
3	0
3	2
16	-2 0
-74471	6
	-334 -113 -108 106 111 332

Subtasks

- Subtask 1 (20% số điểm): $|X| \leq 100$.
- Subtask 2 (80% số điểm): Không có ràng buộc gì thêm.

Bài 10. Bài toán ước số

Cho T câu hỏi và số nguyên dương k cho trước. Mỗi câu hỏi được mô tả bởi một số nguyên dương n . Với mỗi câu hỏi, bạn cần đếm số bộ **có thứ tự** $(a, b_1, b_2, \dots, b_k)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- $1 \leq a, b_1, b_2, \dots, b_k \leq n$.
- $b_1, b_2, \dots, b_k$ là ước của a .
- $b_1 \times b_2 \times \dots \times b_k$ là ước của a .

Yêu cầu. Tính đáp án cho mỗi câu hỏi.

Dữ liệu vào. Nhập vào từ luồng dữ liệu chuẩn gồm:

- Dòng đầu tiên chứa hai số nguyên dương T, k ($1 \leq T, k \leq 10^6$).
- T dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa một số nguyên dương n mô tả một câu hỏi ($1 \leq n \leq 10^6$).

Dữ liệu ra. Ghi ra luồng dữ liệu chuẩn gồm:

- T dòng, mỗi dòng chứa đáp án của câu hỏi tương ứng khi chia dư cho 998 244 353.

Ví dụ

standard input	standard output
5	9
3	39
6	43
7	1908
67	1964
69	

Giải thích. Trong câu hỏi đầu tiên, các bộ (a, b_1, b_2, b_3) thỏa mãn là:

- $(1, 1, 1, 1)$,
- $(2, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 2, 1), (2, 1, 1, 2)$,
- $(3, 1, 1, 1), (3, 3, 1, 1), (3, 1, 3, 1), (3, 1, 1, 3)$.

Subtasks

- Subtask 1 (20% số điểm): $k = 2$ và $n \leq 100$.
- Subtask 2 (30% số điểm): $k = 2$.
- Subtask 3 (50% số điểm): Không có ràng buộc gì thêm.

Bài 11. Lập kỷ lục

Trong Trại hè Sáng tạo, có N bạn học sinh tham gia một trò chơi lập trình gồm N màn chơi. Ở mỗi màn chơi, đúng một bạn học sinh tham gia và nhận được một điểm số. Điểm số của mỗi bạn là một số nguyên dương không vượt quá N , và không có hai bạn nào có cùng điểm số.

Sau mỗi màn chơi, ban tổ chức ghi lại xem bạn vừa chơi có lập kỷ lục mới hay không. Màn chơi thứ i được gọi là một *màn lập kỷ lục* nếu điểm số của bạn chơi ở màn đó lớn hơn điểm số của tất cả các bạn đã chơi trong các màn từ 1 đến $i - 1$. Đặc biệt, màn chơi thứ 1 luôn là một màn lập kỷ lục.

Ví dụ, nếu $N = 5$ và điểm số của bạn chơi ở các màn chơi lần lượt là 1, 3, 2, 5, 4, các màn lập kỷ lục là 1, 2, 4.

Do một vài sơ suất trong quy trình lưu trữ kết quả, ban tổ chức đã làm mất dữ liệu của bảng điểm ban đầu. May mắn thay, ban tổ chức vẫn còn giữ được thông tin về danh sách S gồm các màn chơi là màn lập kỷ lục.

Yêu cầu. Hãy đếm số dãy điểm số có thể xuất hiện qua N màn chơi, sao cho danh sách các màn lập kỷ lục của dãy điểm đó khớp với danh sách S .

Dữ liệu vào. Nhập vào từ luồng dữ liệu chuẩn gồm:

- Dòng đầu tiên chứa hai số nguyên dương $N, |S|$ lần lượt là số bạn học sinh tham gia và số lượng phần tử trong danh sách S ($1 \leq |S| \leq N \leq 2 \times 10^5$).
- Dòng thứ hai chứa $|S|$ số nguyên dương phân biệt $S_1, S_2, \dots, S_{|S|}$ mô tả danh sách các màn lập kỷ lục ($1 \leq S_i \leq N$).

Dữ liệu ra. Ghi ra luồng dữ liệu chuẩn gồm:

- Một số nguyên duy nhất là số dãy điểm số thỏa mãn. Vì kết quả có thể rất lớn nên hãy in ra số dư của kết quả khi chia cho 998244353.

Ví dụ

standard input	standard output
5 3 1 2 4	8

Giải thích. Có 8 dãy điểm số thỏa mãn là (1, 3, 2, 5, 4), (1, 4, 2, 5, 3), (1, 4, 3, 5, 2), (2, 3, 1, 5, 4), (2, 4, 1, 5, 3), (2, 4, 3, 5, 1), (3, 4, 1, 5, 2), (3, 4, 2, 5, 1).

Subtasks

- Subtask 1 (12% số điểm): $N \leq 10$.
- Subtask 2 (18% số điểm): $|S| = 2$; $S_1 = 1$ và $S_2 = N$.
- Subtask 3 (70% số điểm): Không có ràng buộc gì thêm.

Bài 12. Bộ bài ma thuật

Trong một buổi học về các quy luật số học, thầy giáo mang đến lớp một bộ bài ma thuật. Ban đầu trên bàn chưa có lá bài nào. Mỗi lá bài sau khi được tạo ra sẽ được ghi một số nguyên dương.

Bộ bài có quy luật sinh sôi như sau:

- Ở mỗi lượt, thầy chọn số nguyên dương nhỏ nhất x chưa từng được ghi trên bất kỳ lá bài nào đã có.
- Sau đó, thầy lần lượt thêm vào cuối bộ bài bốn lá bài mang các số $x, 2x, 3x, 5x$.

Quá trình trên liên tục được lặp lại tạo thành một chồng bài vô hạn. Các lá bài được đánh số thứ tự chúng được chúng được thêm vào bộ bài.

Ví dụ, các lá bài đầu tiên lần lượt mang các số: 1, 2, 3, 5, 4, 8, 12, 20, 6, 12, 18, 30, ...

Lưu ý rằng cùng một số có thể xuất hiện trên nhiều lá bài khác nhau. Tuy nhiên, khi chọn số x ở đầu mỗi lượt, thầy chỉ quan tâm đến việc số đó đã từng được ghi trên lá bài nào trước đó hay chưa.

Yêu cầu. Thầy đưa ra T câu hỏi. Với mỗi câu hỏi, cho một số nguyên dương N , hãy cho biết số được ghi trên lá bài thứ N .

Dữ liệu vào. Nhập vào từ luồng dữ liệu chuẩn gồm:

- Dòng đầu tiên chứa một số nguyên dương T là số câu hỏi của thầy giáo ($1 \leq T \leq 20$).
- T dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa một số nguyên dương N mô tả một câu hỏi của thầy giáo ($1 \leq N \leq 10^{15}$)

Dữ liệu ra. Ghi ra luồng dữ liệu chuẩn gồm:

- T dòng, dòng thứ i ($1 \leq i \leq T$) ghi số được viết trên lá bài ứng với câu hỏi thứ i .

Ví dụ

standard input	standard output
6	1
1	5
4	4
5	20
8	6
9	30
12	

Subtasks

- Subtask 1 (20% số điểm): Trong tất cả câu hỏi, $N \leq 2000$.
- Subtask 2 (20% số điểm): Trong tất cả câu hỏi, $N \leq 10^6$.
- Subtask 3 (60% số điểm): Không có ràng buộc gì thêm.