

AmsOI - Round 6

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

TỔNG QUAN ĐỀ THI

Tên bài	Tên chương trình	Dữ liệu đầu vào	Kết quả đầu ra
Cặp đôi	PAIR.*	PAIR.INP	PAIR.OUT
Tô màu bi	MARBEL.*	MARBEL.INP	MARBEL.OUT
Đi chuyển trên bảng	GRIDPATH.*	GRIDPATH.INP	GRIDPATH.OUT
Tuần trên cây	TREEGAME.*	TREEGAME.INP	TREEGAME.OUT
Du lịch xe buýt	BUS.*	BUS.INP	BUS.OUT

Dấu * được thay thế bởi py hoặc cpp của ngôn ngữ lập trình tương ứng là Python và C++.

Hãy lập trình giải các bài toán sau:

Câu 1. Cặp đôi (100p)

Kẻ phá vỡ luật lệ là rác rưởi, nhưng những kẻ bỏ rơi đồng đội của mình còn tệ hơn cả rác rưởi.

Thầy Tùng có một số bạn học sinh ưu tú, với số thứ tự từ L đến R ($1 \leq L \leq R \leq 10^9$). Do kì thi Tin học trẻ sắp tới gần, thầy Tùng muốn thành lập các đội 2 người từ những học sinh trên. Tuy nhiên, để hai bạn có thể phối hợp và giao tiếp trơn tru, thầy Tùng muốn ghép hai bạn học sinh thành một đội sao cho tích số thứ tự của họ tạo thành một số chẵn. Nói cách khác, nếu hai bạn học sinh được chọn có số thứ tự a, b ($L \leq a < b \leq R$), thì $a \times b$ phải là số chẵn.

Thầy Tùng muốn biết số cách chọn hai bạn học sinh bất kì thỏa mãn yêu cầu trên.

Dữ liệu

Vào từ file văn bản PAIR.INP:

- Dòng đầu tiên chứa hai số nguyên dương L, R ($1 \leq L \leq R \leq 10^9$).

Kết quả

Ghi ra file văn bản PAIR.OUT:

- In ra một số nguyên duy nhất là số cách chọn hai bạn học sinh bất kì để tạo thành một đội.

Ví dụ

PAIR.INP	PAIR.OUT
1 2	1
4 6	3

Ràng buộc

- (1) Có 50% số điểm thỏa mãn $L \leq R \leq 10^3$.
- (2) 50% số điểm còn lại không có ràng buộc gì thêm

Câu 2. Tô màu bi (100p)

The key to happiness is disregarding the notion that you are special.

Macksay mang trong mình niềm đam mê mãnh liệt với bi. Macksay có N ($1 \leq N \leq 2 \times 10^5$) viên bi với muôn vàn màu sắc khác nhau, mình chứng cho những lần đi săn sự kiện của cậu, tất cả đều được xếp ngay ngắn và cẩn thận trong một thùng carton.

Vào một hôm, Macksay hay tin sẽ có một người con gái chuyển đến sống chung nhà cậu, và để tạo ấn tượng ban đầu tốt với cô ấy, Macksay và bố tích cực dọn nhà. Trong lúc dọn dẹp, cậu để ý đến chiếc thùng carton yêu quý rồi bất chợt nghĩ ra một trò chơi với chúng, mặc cho căn phòng chưa được dọn dẹp.

Trong trò chơi của mình, Macksay sẽ lần lượt lôi ra N viên bi và xếp chúng thành một hàng ngang trên bàn. Viên bi thứ i sẽ được xếp ngay cạnh viên bi thứ $i - 1$ về bên phải với $2 \leq i \leq N$, và viên bi thứ 1 sẽ được xếp đầu tiên. Với mỗi viên bi mới được xếp lên bàn, Macksay sẽ tìm viên bi gần nhất có cùng màu với viên bi vừa đặt lên (nếu có) và hô biến cho tất cả những viên bi nằm giữa chúng trở về cùng màu với viên bi vừa đặt. Việc đổi màu này là vĩnh viễn và màu mới của những viên bi sẽ được duy trì cho đến lần đổi tiếp theo.

Macksay sẽ chơi cho đến khi tất cả N viên bi đều được đặt lên bàn, và cậu muốn biết màu sắc cuối cùng của tất cả viên bi. Tuy nhiên vì còn phải dọn nhà, Macksay cần sự giúp đỡ của bạn!

Dữ liệu

Vào từ file văn bản `MARBEL.INP`:

- Dòng đầu tiên chứa một số nguyên dương N ($1 \leq N \leq 2 \times 10^5$).
- Dòng tiếp theo chứa N số nguyên dương a_1, a_2, \dots, a_N ($1 \leq a_i \leq 10^9$) là thứ tự và màu ban đầu của từng viên bi.

Kết quả

Ghi ra file văn bản `MARBEL.OUT`:

- In ra N số nguyên dương là màu cuối cùng của từng viên bi theo thứ tự từ 1 đến N .

Ràng buộc

- (1) Có 30% số điểm thỏa mãn $N \leq 2000$.
- (2) 30% số điểm còn lại thỏa mãn $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} - \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \leq 1$.
- (3) 40% số điểm còn lại không có ràng buộc gì thêm.

Ví dụ

MARBEL.INP	MARBEL.OUT
6 1 3 2 3 1 2	1 1 1 1 1 2
7 1 5 5 1 3 5 3	1 1 1 1 3 3 3

Giải thích

Trong test mẫu thứ nhất:

- Ban đầu Macksay đặt lên bàn viên bi thứ nhất có màu 1, các viên bi hiện tại là $\{1\}$.
- Macksay đặt lên bàn viên bi thứ hai có màu 3, các viên bi hiện tại là $\{1, 3\}$.

- Macksay đặt lên bàn viên bi thứ ba có màu 2, các viên bi hiện tại là $\{1, 3, 2\}$.
- Macksay đặt lên bàn viên bi thứ tư có màu 3. Do viên bi thứ hai cũng có màu 3 nên Macksay đổi màu viên bi nằm giữa là viên bi thứ ba từ màu 2 thành màu 3. Các viên bi hiện tại là $\{1, 3, 3, 3\}$.
- Macksay đặt lên bàn viên bi thứ năm có màu 1. Viên bi gần nhất cùng màu là viên bi thứ nhất, vậy nên những bi viên thứ hai, ba, bốn được đổi thành màu 1. Các viên bi hiện tại là $\{1, 1, 1, 1, 1\}$.
- Macksay đặt lên bàn viên bi thứ sáu có màu 2. Các viên bi hiện tại là $\{1, 1, 1, 1, 1, 2\}$.

Vậy màu của từng viên bi sau cùng là 1, 1, 1, 1, 1, 2.

Câu 3. Di chuyển trên bảng (100p)

“Make sure you got all those names correct”

Cho một bảng ô vuông $N * M$. Các cột trên bảng được đánh số từ 1 đến N từ trên xuống dưới. Các hàng trên bảng được đánh số từ 1 đến M từ trái qua phải. Ô thuộc hàng thứ i và cột thứ j gọi là ô (i, j) và có trọng số $a_{i,j}$.

Ban đầu, có một con kiến đứng tại ô $(1, 1)$. Trong mỗi nước đi, nó có thể di chuyển sang ô kề cạnh bên phải hoặc nằm dưới. Con kiến không thể ra khỏi bảng trong mọi thời điểm.

Ban được cung cấp một số nguyên dương X , và bạn được yêu cầu đếm số đường đi từ ô $(1, 1)$ đến ô (N, M) thỏa mãn trọng số lớn nhất mà con kiến đi qua trên đường đi đúng bằng X .

Vì kết quả rất lớn, hãy in ra đáp án modulo 16102008.

Dữ liệu

Vào từ file văn bản GRIDPATH.INP:

- Dòng đầu chứa ba số nguyên dương N, M, X .
- N dòng tiếp theo, dòng thứ i chứa m số nguyên dương $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,M}$.

Kết quả

Ghi ra file văn bản GRIDPATH.OUT:

- In ra một số nguyên duy nhất số đường đi thỏa mãn modulo 16102008.

Ví dụ

GRIDPATH.INP	GRIDPATH.OUT
3 3 2 1 1 1 1 2 1 1 1 1	4

Ràng buộc

Trong tất cả các test: $a_{i,j}, X \leq 10^9$ với $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M$.

- (1) Có 10% số điểm thỏa mãn $N, M \leq 5$.
- (2) 20% số điểm thỏa mãn $N = 1, M \leq 10^5$.
- (3) 20% số điểm thỏa mãn $N, M \leq 1000$ và $a_{i,j} = X$ với mọi ô (i, j) .
- (4) 20% số điểm thỏa mãn $N, M \leq 1000$ và chỉ tồn tại một ô (i, j) duy nhất thỏa mãn $a_{i,j} = X$.
- (5) 30% số điểm còn lại thỏa mãn $N, M \leq 1000$.

Câu 4. Tuần trên cây (100p)

Lòng người là cánh chim đêm. Nó âm thầm chờ đợi điều gì, rồi khi thời cơ đến nó sẽ bay vút đi thẳng tắp về phía đó.

Tuần là một alpha male - chú khỉ đầu đàn. Ở vùng đất nọ, tồn tại một cái cây khổng lồ là nơi Tuần cùng bộ lạc của mình sinh sống.

Cái cây ấy có thể được biểu diễn thành một đồ thị gồm N đỉnh và $N - 1$ cạnh liên thông và không tồn tại chu trình. Mỗi đỉnh trên đồ thị được gán một màu là c_i , với $1 \leq i \leq N$. Ngoài ra, ta còn được biết Tuần rất giỏi đu cây (dĩ nhiên rồi vì anh ấy là ‘Tuần Khi’ mà). Trong mỗi bước đi, anh ấy có thể di chuyển từ đỉnh hiện tại anh ấy đang đứng đến một đỉnh kề cạnh hoặc một đỉnh cùng màu, hay nói cách khác, Tuần có thể di chuyển từ đỉnh u nơi anh ấy đang đứng sang đỉnh v nếu có cạnh nối trực tiếp giữa u và v , hoặc $c_u = c_v$.

Tò mò về khả năng đu cây của Tuần, những người bạn của anh ấy có Q câu hỏi. Ở mỗi câu hỏi, họ muốn biết số bước đi ít nhất để Tuần di chuyển đến đỉnh b , nếu anh ấy đang đứng ở đỉnh a . Tuy nhiên, do chưa qua chọn lọc tiến hóa kĩ càng nên Tuần không thể trả lời câu hỏi này, nhiệm vụ của bạn là hãy giúp Tuần tìm ra đáp án của mỗi câu hỏi trên!

Dữ liệu

Vào từ file văn bản TREEGAME.INP:

- Dòng đầu tiên chứa hai số nguyên dương N, Q .
- Dòng thứ hai chứa N số nguyên dương c_1, c_2, \dots, c_N
- $N - 1$ dòng sau chứa hai số nguyên dương u, v ($u, v \leq N$), cạnh nối của đồ thị
- q dòng sau mỗi dòng chứa hai số nguyên dương a, b ($a, b \leq N$)

Kết quả

Ghi ra file văn bản TREEGAME.OUT:

- Gồm Q dòng, đáp án của các truy vấn

Ví dụ

TREEGAME.INP	TREEGAME.OUT
5 4	2
1 2 1 2 2	1
2 1	2
3 2	2
4 2	
5 1	
3 5	
1 2	
4 3	
1 4	

Ràng buộc

Trong tất cả các test $c_i \leq 10^5$, $Q \leq 10^5$

- (1) 15% số điểm thỏa mãn c_i đôi một phân biệt và $N \leq 3 \times 10^5$.
- (2) 15% số điểm thỏa mãn $N \leq 300$, $Q = 1$, $c_i \leq 60$.
- (3) 30% số điểm thỏa mãn $N \leq 1000$, $Q \leq 100$, $c_i \leq 15$.

(4) 30% số điểm thỏa mãn $N \leq 10^5$ $c_i \leq 15$.

(5) 10% số điểm còn lại thỏa mãn $c_i \leq 60$ và $N \leq 3 \times 10^5$.

Câu 5. Du lịch xe buýt (100p)

In Australia there are 48 million kangaroos and in Uruguay there are 3,457,380 inhabitants. So if the kangaroos decide to invade Uruguay, each Uruguayan will have to fight 14 kangaroos.

Bạn là một khách du lịch đang khám phá một quốc đảo có N điểm du lịch, được đánh số từ 1 đến N . Bạn bắt đầu hành trình tại điểm du lịch số 1.

Có một hệ thống xe buýt kết nối các điểm du lịch này. Từ mỗi điểm du lịch i , có một tuyến xe buýt duy nhất hoạt động. Tuyến xe buýt này dừng tại các điểm du lịch cách nhau một khoảng cách là d_i , và có tổng cộng x_i điểm dừng (không bao gồm điểm xuất phát). Nếu $d_i = 0$, tuyến xe buýt từ điểm i hiện không hoạt động.

Hay nói cách khác, nếu bạn lên xe buýt ở thành phố i , bạn có thể xuống xe tại bất kỳ thành phố nào có số hiệu $i + t \times d_i$ với $1 \leq t \leq x_i$

Bạn muốn khám phá các điểm du lịch khác nhau bằng cách sử dụng xe buýt. Bạn có thể lên xe buýt tại điểm xuất phát của nó, nhưng có thể xuống tại bất kỳ điểm dừng nào trên tuyến đường.

Yêu cầu: Tính toán số lượng hành trình khác nhau mà bạn có thể thực hiện, bắt đầu từ điểm du lịch số 1. Hai hành trình được coi là khác nhau nếu chúng dừng ở các chuỗi điểm du lịch khác nhau. Hãy tính toán số lượng này và in ra đáp án theo modulo $10^9 + 7$.

Dữ liệu

Vào từ file văn bản BUS.INP:

- Dòng đầu tiên chứa số nguyên dương N - số địa điểm du lịch.
- N dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa hai số nguyên dương d_i, x_i - mô tả tuyến đường bắt đầu tại thành phố thứ i .

Kết quả

Ghi ra file văn bản BUS.OUT:

- Một dòng duy nhất là số cách bạn có thể đến thăm một địa điểm du lịch, được lấy modulo $10^9 + 7$

Ràng buộc

Trong tất cả các test $d_i, x_i \leq 10^9$, $N \leq 10^5$

- (1) Có 15% số điểm thỏa mãn $N \leq 15$.
- (2) 15% số điểm tiếp theo thỏa mãn $N \leq 5 \times 10^3$
- (3) 20% số điểm tiếp theo thỏa mãn $d_i = 1$, với $1 \leq i \leq N$.
- (4) 25% số điểm tiếp theo thỏa mãn $x_i = 10^9$, với $1 \leq i \leq N$.
- (5) 25% số điểm còn lại không có ràng buộc gì thêm.

Ví dụ

BUS . INP	BUS . OUT
8 3 5 1 3 3 3 2 3 1 3 3 2 3 4 3 2	5
6 2 5 2 3 2 3 1 2 1 4 2 3	6

Giải thích

Số cách di chuyển trong test mẫu thứ nhất như sau:

- 1
- 1 → 4
- 1 → 4 → 6
- 1 → 4 → 8
- 1 → 7

———— HẾT ————